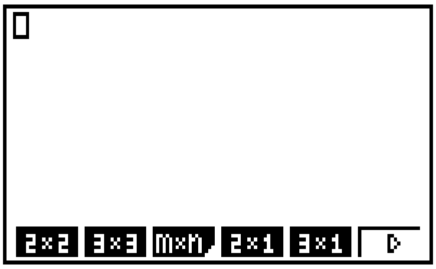
Rechnen mit Vektoren im RUN- Menü

Einen dreidimensionalen Vektor kann man als Matrix mit drei Zeilen und einer Spalte auffassen. Dadurch kann man mit Vektoren rechnen.

D.h. konkret, man kann Vektoren addieren (subtrahieren) und vervielfachen (also mit einer reellen Zahl multiplizieren).

Eine Maske für einen Vektor erhält am schnellsten mit Hilfe der Tastenkombination:

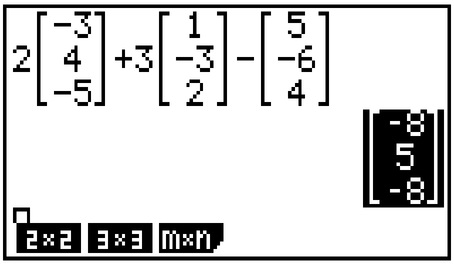
[F4] (MATH) [F1] (MAT) [F5] (3x1)



Beachte: Die Eingabe der drei Vektorkomponenten erfolgt **ohne** Betätigung der [EXE] Taste, nur mit Hilfe des Cursors.

Beispiel 1: Berechnung einer Linearkombination aus drei Vektoren

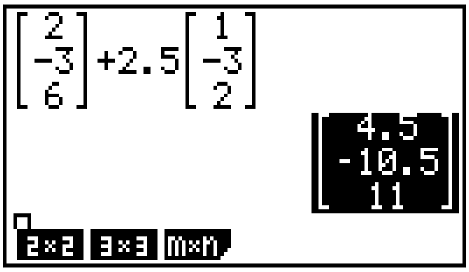
$$\vec{d} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Beispiel 2: Berechnung eines Punktes (z.B. Schnittpunkt) auf einer Geraden

Nachdem man den Parameter r mit Hilfe eines LGS berechnet hat setzt man den Wert von r (z.B. r = 2,5) in die Geradengleichung ein.

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + 2{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



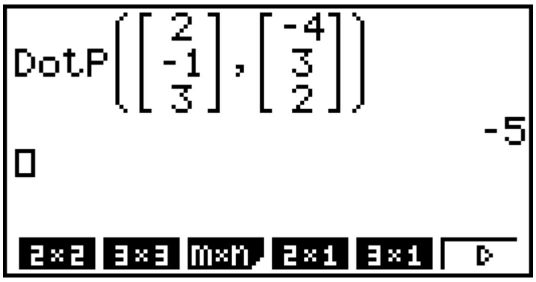
Nach dem Update vom Herbst 2013 (für den CASIO CG 20) bzw. vom März 2014 (für den CASIO CG 9860 II) hat man auch noch weitere Vektoroptionen zur Verfügung. Dies sind:

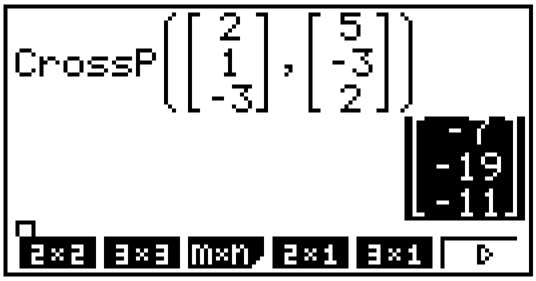
- Berechnung des Skalarprodukts zweier Vektoren
- Berechnung des Kreuzprodukts (Vektorprodukts) zweier Vektoren
- Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren
- Berechnung eines Einheitsvektors zu einem gegebenen Vektor
- Berechnung der Länge eines Vektors

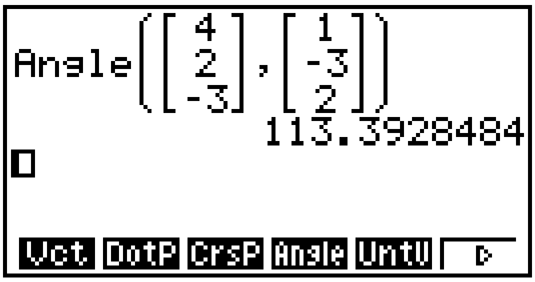
Man gelangt zu diesen Vektoroptionen durch folgende Tastenkombination:

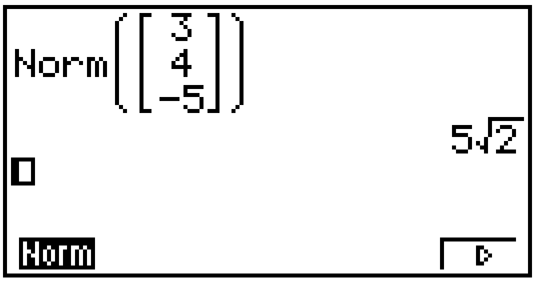
OPTN F2 (MAT) F6 (▷) F6 (▷)

Beispiele:





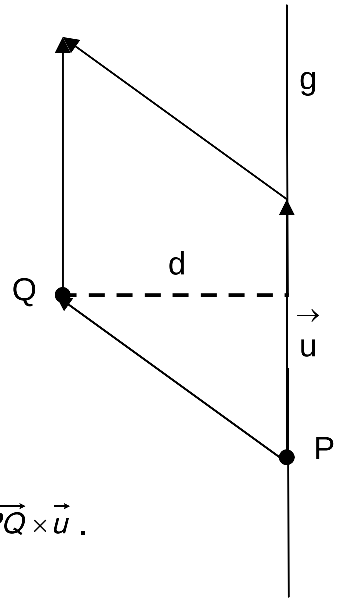




HINWEIS:

Das Update von März 2014 steht für die Rechner CASIO 9860 G und CASIO 9860 G Slim leider nicht zur Verfügung.

BEISPIEL 1 Bestimmung des Abstandes des Punktes Q(– 2 **|** 3 **|** 5) von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.



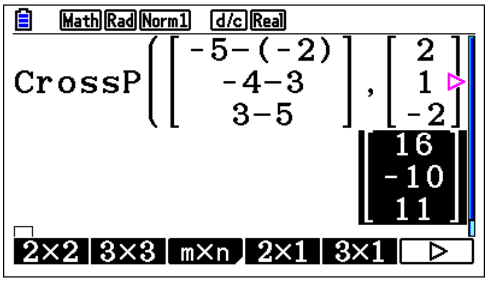
Berechnung mithilfe des Vektorprodukts

Für den Flächeninhalt eines Parallelogramms gilt: A = g · h
In der Skizze bedeutet dies: A = $|\vec{u}|$ · d.

Andererseits gilt: A = $|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|$

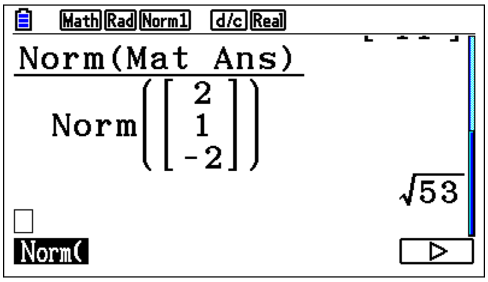
Somit gilt: d = $\dfrac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$

Schritt 1: Man berechnet zunächst mit dem GTR den Vektor $\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}$.



Schritt 2: Man berechnet dann den Betrag dieses Vektors und dividiert ihn durch den Betrag des Richtungsvektors $\vec{u}$.

Dazu holt man entweder den soeben berechneten Vektor aus dem Matrixspeicher (Mat ans) oder man speichert den Vektor vorher unter einem selbst gewählten Namen ab.



Leider kann man die beiden Vektoroperationen „Norm“ und „CrossP“ nicht verketten.

BEISPIEL 2 Bestimmung der Gleichung einer Winkelhalbierenden der beiden Geraden g und h.

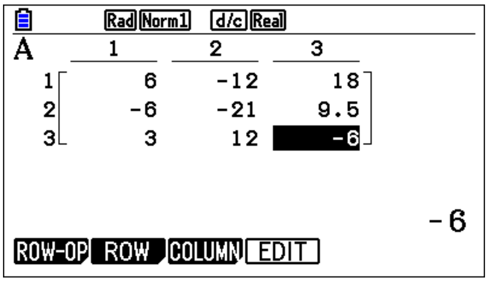
g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3{,}5 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ -12 \end{pmatrix}$

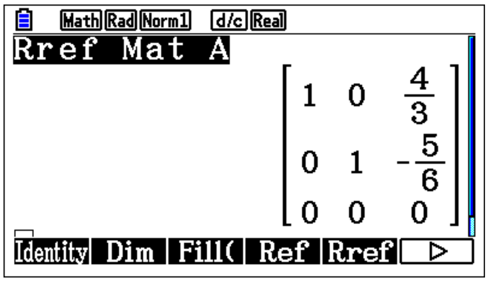
Schritt 1: Man bestimmt zunächst den Schnittpunkt der beiden Geraden.

Gleichsetzen liefert das LGS:

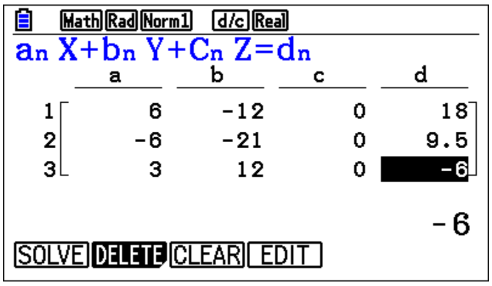
$$\begin{aligned} 6r - 12s &= 18 \\ -6r - 21s &= 9{,}5 \\ 3r + 12s &= -6 \end{aligned}$$

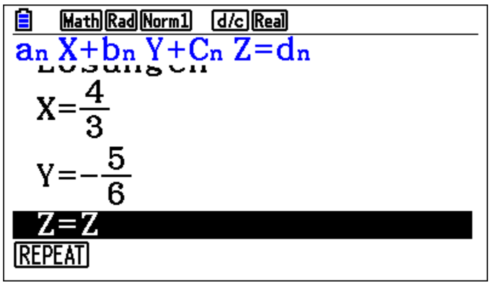
Variante a: Man gibt die Koeffizienten des LGS in eine Matrix A ein und formt die Matrix A im RUN- Menü mithilfe des Befehls „Rref“ um. Man kann die Parameter r und s dann einfach ablesen.



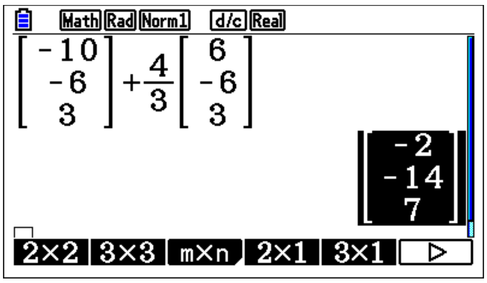


Variante b: Man führt einen dritten Parameter t ein, dessen Koeffizienten man aber jeweils Null setzt.
So erhält man ein LGS mit drei Gleichungen und drei Variablen mit unendlich vielen Lösungen (t ist ja beliebig), das man direkt im EQUA-Menü lösen kann.

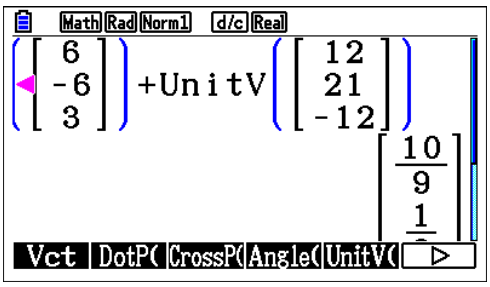


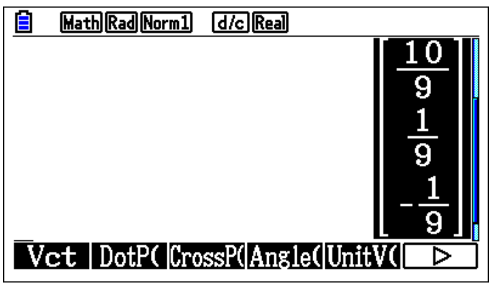


Schritt 2: Man berechnet den Schnittpunkt S, indem man z.B. r in die Geraden-Gleichung von g einsetzt.



Schritt 3: Man bestimmt einen möglichen Richtungsvektor der Winkelhalbierenden, indem man die Einheitsvektoren der beiden Richtungsvektoren von g und h addiert. Dazu verwendet man den Befehl „UntV“ (Unit vector).

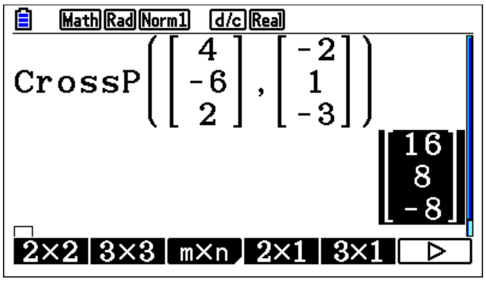




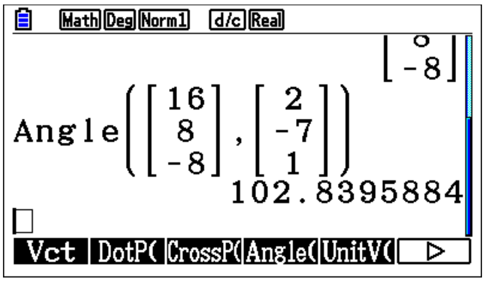
BEISPIEL 3 Bestimmung des Schnittwinkels der Ebenen E und F.

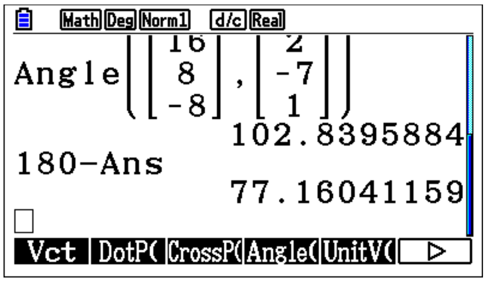
E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; F: $2x_1 - 7x_2 + x_3 = 14$

Schritt 1: Man bestimmt mithilfe des Befehls „CrossP“ einen Normalenvektor der Ebene E. Der Normalenvektor der Ebene F lässt sich direkt ablesen.



Schritt 2: Man berechnet mit Hilfe des Befehl „Angle“ den Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren. Dadurch erhält man entweder direkt den gesuchten Winkel oder dessen Nebenwinkel.





Übungsaufgaben

AUFGABE 1 Berechnen Sie den Abstand des Punktes A(1 **|** – 2 **|** 3) von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

AUFGABE 2 Bestimmen Sie eine Gleichung einer Winkelhalbierenden der Geraden g und h.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 18 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

AUFGABE 3 Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Ebene E mit der Geraden g.

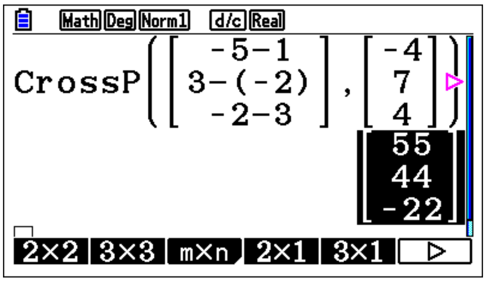
E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

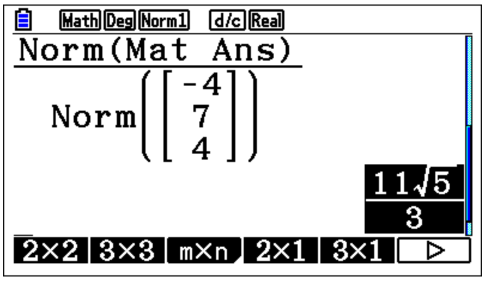
AUFGABE 4 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

A(5 **|** – 4 **|** 12) ; B(– 5 **|** 4 **|** 6) ; C(6 **|** 2 **|** 7)

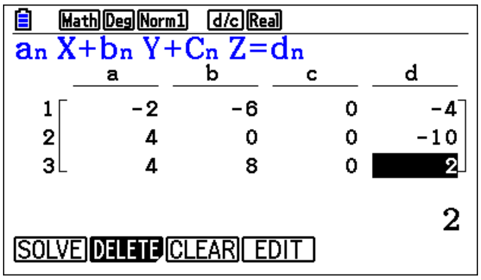
Lösungen der Übungsaufgaben

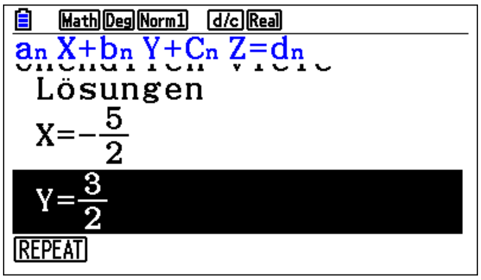
AUFGABE 1 Abstand d(A ; g) = $\frac{11\sqrt{5}}{3} \approx 8{,}199$

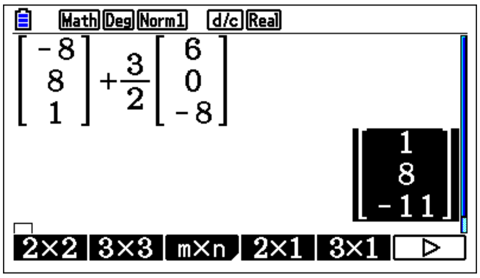




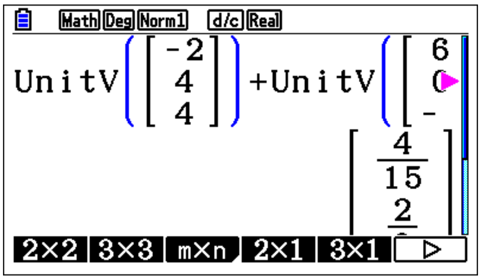
AUFGABE 2 Schnittpunkt S(1 | 8 | – 11)

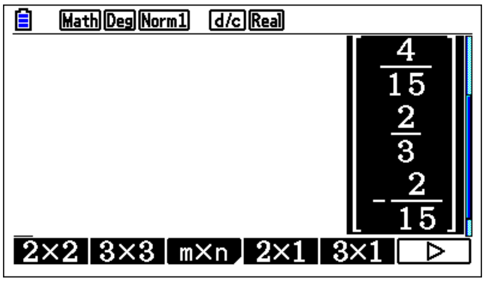




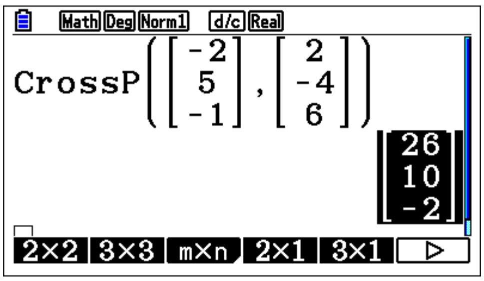


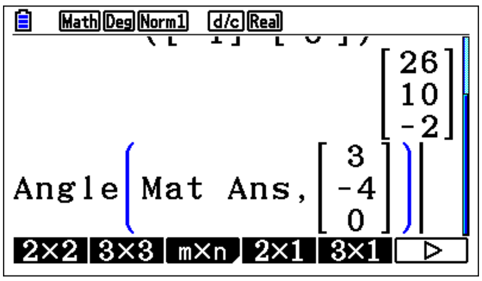
Geradengleichung der Winkelhalbierenden w: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

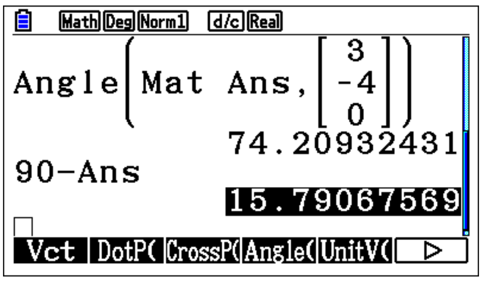




AUFGABE 3 Schnittwinkel $\varphi \approx 15{,}79°$







AUFGABE 4 Flächeninhalt A = $18\sqrt{6} \approx 44{,}09$